

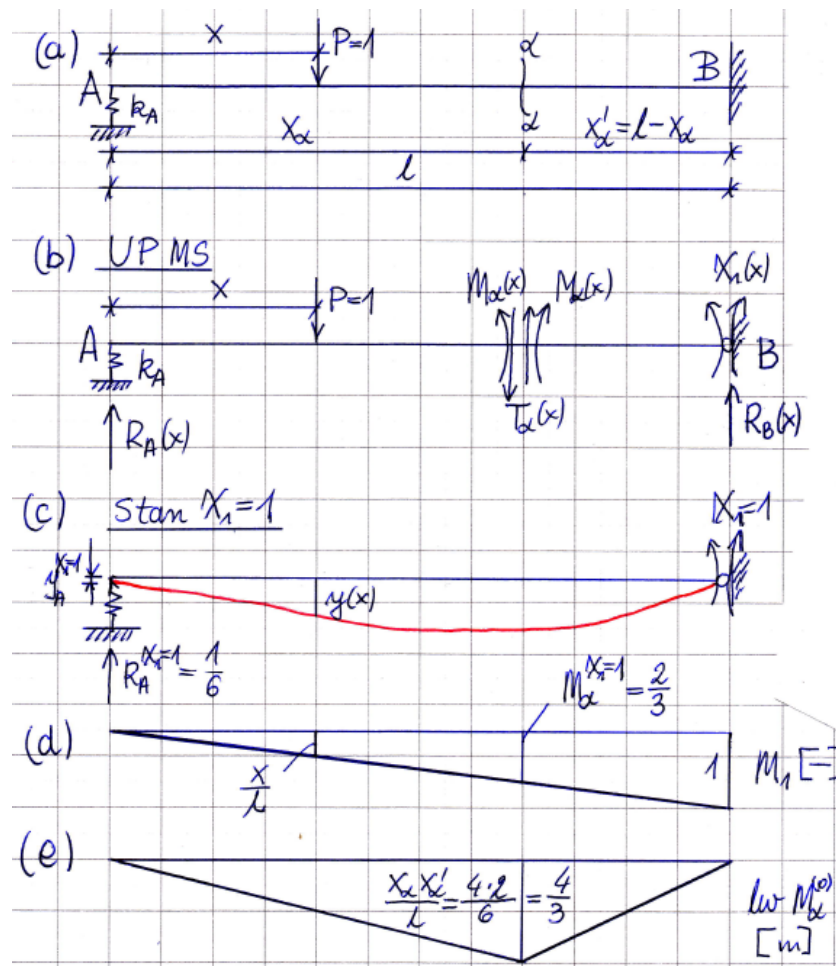
LINIE WPŁYWU W BELCE STATYCZNIE NIWYZNACZALNEJ  
(Przykład liczbowy)

Zacznijmy od zdefiniowania pojęcia *linii wpływu* (używa się też pojęcia *linii wpływowej*).

**Linia wpływu**  $lw W_\alpha$  jest to zależność funkcyjna, która określa wartość wielkości  $W$  w ustalonym miejscu  $\alpha$  danej konstrukcji zależnie od miejsca położenia  $x$  jednostkowego obciążenia  $P = 1$  (lub  $M = 1$ ), tzn.

$$lw W_\alpha \equiv W_\alpha(x) \quad (1)$$

**PRZYKŁAD.** Wyznaczyć linie wpływu:  $lw R_A$ ,  $lw R_B$ ,  $lw M_B$ ,  $lw M_\alpha$ ,  $lw T_\alpha$  w belce statycznie niewyznaczalnej pokazanej na rys. 1, która jest utwierdzona na prawym końcu B i podparta sprężystie na lewym końcu A. Na rys. 1 b,c,d,e pokazano przyjęty układ podstawowy metody sił (UPMS), zwroty poszukiwanych wielkości, stan  $X_1 = 1$  i odpowiadający mu wykres momentów  $M_1$  oraz  $lw M_\alpha^{(o)}$  w UPMS.



Rysunek 1: (a) Belka 1-krotnie statycznie niewyznaczalna,  $n \equiv SSN = 1$ , o sprężystości podatnej podporze A, obciążona jednostkową siłą  $P = 1$  o zmiennym położeniu  $x$ ; (b) UPMS, w którym moment na podporze B zastąpiono siłą nadliczbową  $X_1(x) \equiv M_B(x)$

## ROZWIĄZANIE

**Dane:** sztywność giętna belki  $EI = EI_o = \text{const.}$ , sztywność podpory A,  $k_A = \frac{1}{10}EI_o$ , długość belki  $\ell = 6$  m,  $x_\alpha = 4$  m,  $x'_\alpha = \ell - x_\alpha = 2$  m.

Wskutek zmiennego położenia  $x$  siły  $P = 1$ , poszukiwane wielkości w analizowanej belce zależą od  $x$ . Układ równań kanonicznych metody sił redukuje się w tym przypadku,  $n \equiv SSN = 1$ , do jednego równania

$$\delta_{11}X_1(x) + \delta_{1p}(x) = 0 \quad (2)$$

Z równania (2), uwzględniając oznaczenie (1), otrzymujemy ogólny wzór na linię wpływu siły nadliczbowej  $X_1$ :

$$\text{lw } X_1 \equiv X_1(x) = -\frac{\delta_{1p}(x)}{\delta_{11}} \quad (3)$$

Wielkość przemieszczenia  $\delta_{11}$  wywołanego stanem  $X_1 = 1$ , zob. rys. 1c, obliczymy wg znanego wzoru

$$\delta_{11} = \int_0^\ell \frac{M_1 M_1}{EI} + \frac{R_A^{X_1=1} \cdot R_A^{X_1=1}}{k_A} \quad (4)$$

Całkując sposobem Wereszczagina-Mohra, zob. wykres  $M_1$  na rys. 1d, otrzymujemy

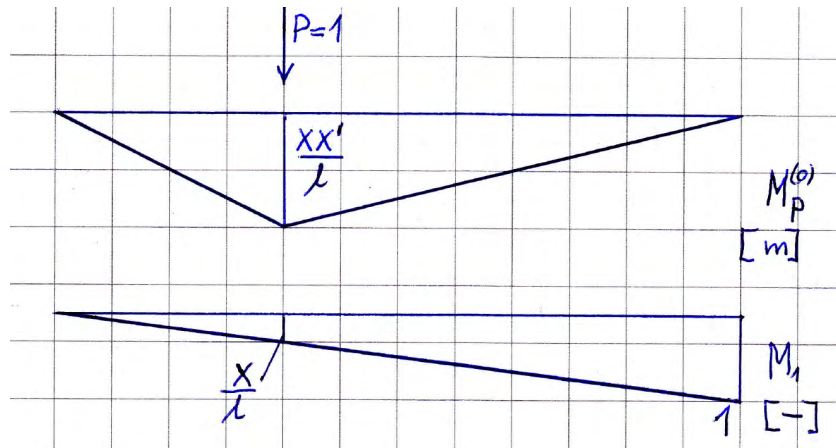
$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_o} \frac{6 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{10}EI_o} = \frac{41}{18EI_o} \quad (5)$$

Przemieszczenie  $\delta_{1p}(x)$ , które jest funkcją przyłożenia  $x$  siły  $P = 1$ , obliczymy w dwojaki sposób.

SPOSÓB 1: Skorzystamy bezpośrednio ze wzoru definiującego

$$\delta_{1p}(x) = \int_0^\ell \frac{M_1 M_p^{(o)}}{EI} + \frac{R_A^{X_1=1} \cdot R_A^P}{k_A} \quad (6)$$

W tym celu wykorzystamy wykresy przedstawione na rys. 2



Rysunek 2: Wykresy momentów gnących w UPMS:  $M_p^{(o)}$  — wywołany siłą  $P = 1$ , oraz  $M_1$  — wywołany siłą  $X_1 = 1$

Całkę we wzorze (6) obliczymy sposobem Wereszczagina-Mohra, jak poniżej

$$\delta_{1p}(x) = \int_0^x \frac{M_1(\xi)M_p^{(o)}(x, \xi)}{EI} d\xi + \int_x^\ell \frac{M_1(\xi)M_p^{(o)}(x, \xi)}{EI} d\xi + \frac{R_A^{X_1=1} \cdot R_A^P}{k_A} \quad (7)$$

$$= \frac{1}{EI_o} \left[ \frac{x \cdot x \cdot x'}{2\ell} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\ell} + \frac{x' \cdot x \cdot x'}{2\ell} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\ell} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{x'}{\ell} \cdot 10 \right] \quad (8)$$

$$= \frac{1}{EI_o} \left( -\frac{1}{36} x^3 + \frac{13}{18} x + \frac{5}{3} \right) \quad (9)$$

gdzie uwzględniliśmy, że  $x' = \ell - x$ .

SPOSÓB 2: Skorzystamy z twierdzenia Maxwella o wzajemności przemieszczeń, zgodnie z którym zachodzi równość

$$\delta_{1p}(x) = \delta_{p1}(x) \equiv y(x) \quad (10)$$

gdzie  $y(x)$  oznacza ugięcie belki pod siłą  $P = 1$  wywołane siłą  $X_1 = 1$  (tutaj w UPMS).

Ugięcie  $y(x)$  możemy obliczyć całkując różniczkowe równanie równowagi belki w stanie  $X_1 = 1$ . Kolejno otrzymujemy

$$EI_o y'' = -M(x) \equiv -M_1(x) = -\frac{x}{\ell} \quad (11)$$

$$EI_o y' = C - \frac{x^2}{2\ell} \quad (12)$$

$$EI_o y = D + Cx - \frac{x^3}{6\ell} \quad (13)$$

Stałe całkowania  $C, D$  wyznaczmy z warunków brzegowych (podparcia) belki pokazanej na rys. 1c:

$$x = 0: \quad y = y_A = \frac{5}{3EI_o} \quad \Rightarrow D = \frac{5}{3} \quad (14)$$

$$x = \ell = 6: \quad y = y_B = 0 \quad \Rightarrow C = \frac{13}{18} \quad (15)$$

Podstawiając wartości wartości  $D$  i  $C$  wg (14) i (15) oraz  $\ell = 6$  do wzoru (13) otrzymujemy

$$\delta_{p1}(x) \equiv y(x) = \frac{1}{EI_o} \left( -\frac{1}{36} x^3 + \frac{13}{18} x + \frac{5}{3} \right) \quad (16)$$

czyli, zgodnie z oczekiwaniami, tę samą funkcję co dla  $\delta_{1p}(x)$  wg wzoru (9).

Teraz ze wzoru (3) mamy

$$\text{lw } X_1 \equiv X_1(x) = \frac{1}{82} (x^3 - 26x - 60), \quad \text{dla } 0 \leq x \leq \ell = 6 \quad (17)$$

Ponadto, dla przyjętego tu UPMS zachodzi

$$\text{lw } M_B \equiv \text{lw } X_1 = \frac{1}{82} (x^3 - 26x - 60), \quad \text{dla } 0 \leq x \leq \ell = 6 \quad (18)$$

Ogólnie rzecz ujmując, gdy znamy wielkości nadliczbowe  $X_i$ ,  $i = 1 \dots n$ , linię wpływu dowolnej wielkości w układzie statycznie niewyznaczalnym  $\text{lw } W_\alpha \equiv \text{lw } W_\alpha^{(n)}$  obliczamy zgodnie ze wzorem (zasada superpozycji obowiązująca w układach liniowych):

$$\text{lw } W_\alpha = \text{lw } W_\alpha^{(o)} + \sum_{i=1}^n W_\alpha^{X_i=1} \cdot \text{lw } X_i \quad (19)$$

lub wyrażając go *explicite* jako funkcję położenia  $x$  siły  $P = 1$ ,

$$W_\alpha(x) = W_\alpha^{(o)}(x) + \sum_{i=1}^n W_\alpha^{X_i=1} \cdot X_i(x) \quad (20)$$

gdzie  $W_\alpha^{X_i=1}$  oznacza wartość wielkości  $W$  w miejscu  $\alpha$  od  $X_i = 1$  w UPMS.

W tym przykładzie wzór (19) dla poszukiwanych linii wpływu przyjmuje postać:

$$\text{lw } R_A = \text{lw } R_A^{(o)} + R_A^{X_1=1} \cdot \text{lw } X_1 \quad (21)$$

$$\text{lw } R_B = \text{lw } R_B^{(o)} + R_B^{X_1=1} \cdot \text{lw } X_1 \quad (22)$$

$$\text{lw } M_\alpha = \text{lw } M_\alpha^{(o)} + M_\alpha^{X_1=1} \cdot \text{lw } X_1 \quad (23)$$

$$\text{lw } T_\alpha = \text{lw } T_\alpha^{(o)} + T_\alpha^{X_1=1} \cdot \text{lw } X_1 \quad (24)$$

Zgodnie z rys. 1 b,c,d, zachodzi

$$R_A^{X_1=1} = \frac{1}{6}, \quad R_B^{X_1=1} = -\frac{1}{6}, \quad M_\alpha^{X_1=1} = \frac{2}{3}, \quad T_\alpha^{X_1=1} = \frac{1}{6} \quad (25)$$

a linie wpływu w układzie statycznie wyznaczalnym określone są wzorami

$$R_A^{(o)}(x) = 1 - \frac{x}{\ell}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq \ell, \text{ czyli } P \in \langle A, B \rangle \quad (26)$$

$$R_B^{(o)}(x) = \frac{x}{\ell}, \quad \text{dla } 0 \leq x \leq \ell, \text{ czyli } P \in \langle A, B \rangle \quad (27)$$

$$M_\alpha^{(o)}(x) = \begin{cases} x'_\alpha \cdot R_B^{(o)}(x), & \text{dla } 0 \leq x \leq x_\alpha, \text{ czyli } P \in \langle A, \alpha \rangle \\ x_\alpha \cdot R_A^{(o)}(x), & \text{dla } x_\alpha \leq x \leq \ell, \text{ czyli } P \in \langle \alpha, B \rangle \end{cases} \quad (28)$$

$$T_\alpha^{(o)}(x) = \begin{cases} -R_B^{(o)}(x), & \text{dla } 0 \leq x < x_\alpha, \text{ czyli } P \in \langle A, \alpha \rangle \\ +R_A^{(o)}(x), & \text{dla } x_\alpha < x \leq \ell, \text{ czyli } P \in \langle \alpha, B \rangle \end{cases} \quad (29)$$

W szczególności dla linii wpływu reakcji na podporze A w układzie rzeczywistym,  $\text{lw } R_A$ , zgodnie ze wzorami (21), (26), (25)<sub>1</sub> i (17), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{lw } R_A \equiv R_A(x) &= 1 - \frac{x}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{82} (x^3 - 26x - 60) \\ &= \frac{1}{492} (x^3 - 108x + 432), \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 6, \text{ czyli } P \in \langle A, B \rangle \end{aligned} \quad (30)$$

Podstawiając linie wpływu wg wzorów (26) – (29), współczynniki (25) i linię wpływu nadliczbowej  $X_1$  wg (17) do formuł (21) – (24), dochodzimy do końcowych wzorów na linie wpływu szukanych wielkości w układzie rzeczywistym

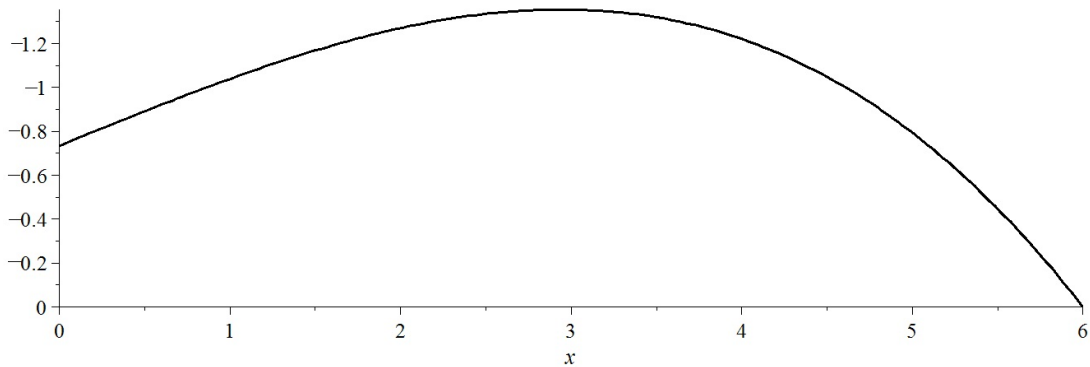
$$\text{lw } R_A \equiv R_A(x) = \frac{1}{492} (x^3 - 108x + 432), \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 6, \text{ czyli } P \in \langle A, B \rangle \quad (31)$$

$$\text{lw } R_B \equiv R_B(x) = \frac{1}{492} (-x^3 + 108x + 60), \quad \text{dla } 0 \leq x \leq 6, \text{ czyli } P \in \langle A, B \rangle \quad (32)$$

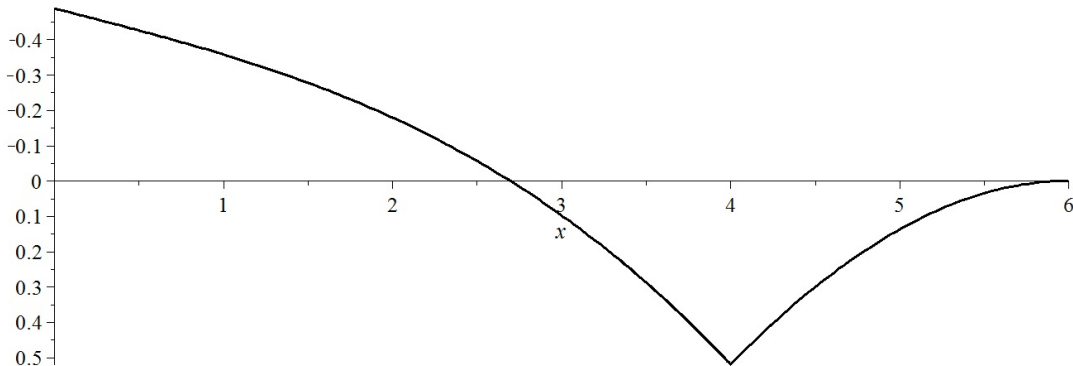
$$\text{lw } M_\alpha \equiv M_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{4}{492} (x^3 + 15x - 60), & \text{dla } 0 \leq x \leq 4, \text{ czyli } P \in \langle A, \alpha \rangle \\ \frac{4}{492} (x^3 - 118x + 432), & \text{dla } 4 \leq x \leq 6, \text{ czyli } P \in \langle \alpha, B \rangle \end{cases} \quad (33)$$

$$\text{lw } T_\alpha \equiv T_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{492} (x^3 - 108x - 60), & \text{dla } 0 \leq x < 4, \text{ czyli } P \in \langle A, \alpha \rangle \\ \frac{1}{492} (x^3 - 108x + 432), & \text{dla } 4 < x \leq 6, \text{ czyli } P \in \langle \alpha, B \rangle \end{cases} \quad (34)$$

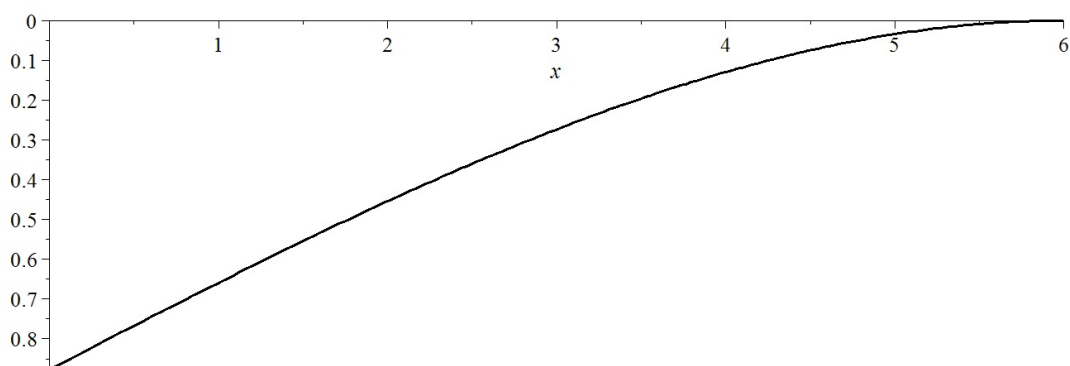
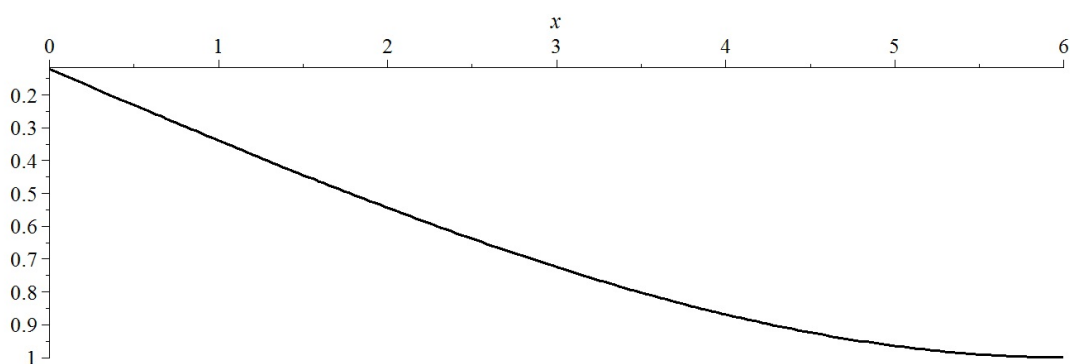
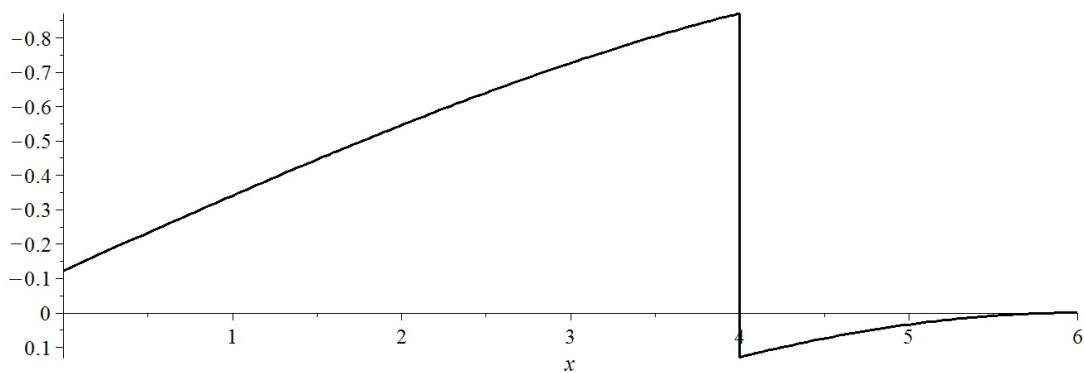
Wykresy linii wpływu wg wzorów (17), (31) – (34) pokazują rys. 3 - rys. 7.



Rysunek 3: Linia wpływu siły nadliczbowej  $X_1 \equiv M_B$ ,  $\text{lw } X_1 \equiv X_1(x)$



Rysunek 4: Linia wpływu momentu zginającego w przekroju  $\alpha - \alpha$  belki,  $\text{lw } M_\alpha \equiv M_\alpha(x)$

Rysunek 5: Linia wpływu reakcji  $R_A$  na sprężyste podatnej podporze A, lw  $R_A \equiv R_A(x)$ Rysunek 6: Linia wpływu reakcji  $R_B$  na niepodatnej podporze B, lw  $R_B \equiv R_B(x)$ Rysunek 7: Linia wpływu siły tnącej w przekroju  $\alpha - \alpha$  belki, lw  $T_\alpha \equiv T_\alpha(x)$ 

## UWAGI I WNIOSKI

1. Linie wpływu w układach statycznie niewyznaczalnych są funkcjami nieliniowymi, natomiast w układach statycznie wyznaczalnych są funkcjami odcinkowo-liniowymi.
2. Gdy siła  $P = P_o$  zostanie przyłożona w miejscu  $x = x_{extr} = 2.944$  m, to wywoła ekstremalny (ujemny) moment w utwierdzeniu na podporze B, który wg (18) wynosi

$$\text{ekstr } M_B = M_B(x_{extr} = 2.944) = -1.354P_o \quad (35)$$

3. Wskutek podatności podpory A, reakcja  $R_A$  od siły  $P = 1$  przyłożonej w pkt. A jest mniejsza niż 1, a siła  $P = P_o$  przyłożona w pkt. A wywołuje ujemny moment zginający w przekroju  $\alpha - \alpha$  belki

$$\text{lw } R_A|_{\text{gd}y P=1 \text{ w pkt. A}} \equiv R_A(x=0) = \frac{432}{492} < 1, \quad M_\alpha(x=0) = -\frac{30}{41}P_o \quad (36)$$

4. Siła  $P = P_o$  przyłożona w pkt.  $x = x_0 = 2.695$  m nie wywołuje momentu zginającego w przekroju  $\alpha - \alpha$  belki

$$M_\alpha(x_0 = 2.695) = 0 \quad (37)$$

5. Siła  $P = P_o$  przyłożona w pkt.  $x = x_\alpha = 4$  m wywołuje maksymalny moment zginający w przekroju  $\alpha - \alpha$  belki

$$\max M_\alpha = M_\alpha(x_\alpha = 4) = \frac{64}{123}P_o \quad (38)$$

6. Wartość wielkości  $W_\alpha$  wywołaną obciążeniem ciągłym belki  $q = q(x)$ , działającym na odcinku  $x_p - x_k$ , obliczamy całkując linię wpływu  $W_\alpha$  pomnożoną przez  $q$  (lub jak mówimy *obciążoną* przez  $q$ ):

$$W_\alpha = \int_{x_p}^{x_k} W_\alpha(x) q(x) dx \quad (39)$$

W szczególności, stałe obciążenie  $q = q_o = \text{const.}$  rozłożone na całej długości belki wywoła w niej następujące siły i momenty:

$$R_A = \int_0^\ell R_A(x) q(x) dx = q_o \int_0^{\ell=6} \frac{1}{492} (x^3 - 108x + 432) dx = \frac{81}{41} q_o \quad (40)$$

oraz

$$R_B = \frac{165}{41} q_o, \quad X_1 = -\frac{252}{41} q_o, \quad M_\alpha = -\frac{4}{41} q_o, \quad T_\alpha = -\frac{83}{41} q_o \quad (41)$$

KONIEC PRZYKŁADU